Enseignant·e·s: Dovi, Huruguen, Maatouk
Géométrie Analytique - CMS
8 janvier 2024
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 2 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 11 questions et 7 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 30 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** ci-dessous on munit le plan d'un repère $\mathcal{R}$ et on considère une transformation géométrique f d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \lambda \\ y' = \gamma x + \delta y + \mu\,. \end{cases}$$

Question 1 (2 points)

On suppose dans cette question que $\mathcal{R}$ est orthonormé direct et que f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ centrée au point de coordonnées $(2,1)$. Quelle est la valeur de λ ?

☐ $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\lambda = -\sqrt{3} + \frac{3}{2}$ ■ $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\lambda = -\sqrt{3} + \frac{5}{2}$

Correction : La matrice de f est $R_{-\frac{\pi}{3}}$. Comme $(2,1)$ est fixe, on a :

$$\begin{cases} 2 = 2\cos(-\frac{\pi}{3}) - \sin(-\frac{\pi}{3}) + \lambda \\ 1 = 2\sin(-\frac{\pi}{3}) + \cos(-\frac{\pi}{3}) + \mu\,. \end{cases}$$

Question 2 (2 points)

On suppose dans cette question que f est la symétrie par rapport à la droite $x + 2y = 0$ parallèlement à la droite $x = 3y$. Quelle est la valeur de δ ?

■ $\delta = \frac{1}{5}$ ☐ $\delta = \frac{6}{5}$ ☐ $\delta = \frac{3}{5}$ ☐ $\delta = 5$

Correction : On sait ici que f a pour matrice $2P - I_2$ où $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Question 3 (2 points)

On suppose dans cette question que :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -20 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Parmi les affirmations suivantes, sélectionner celle qui est vraie.

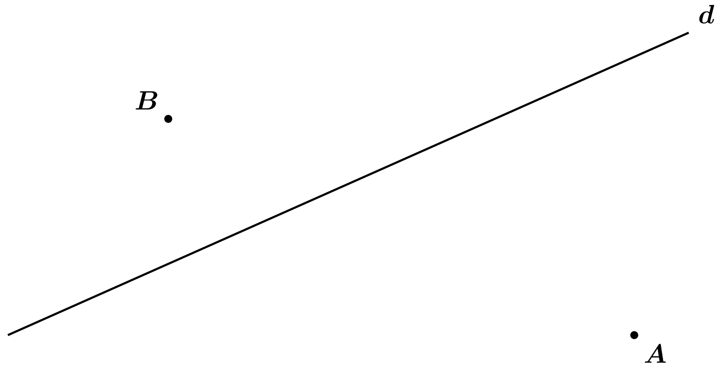
☐ f est une projection dont l'un des axes est la droite d'équation $x + 4y = 0$
☐ f est une symétrie dont l'un des axes est la droite d'équation $y = 5x$
■ f est une projection dont l'un des axes est la droite d'équation $y = 5x$
☐ f est une symétrie dont l'un des axes est la droite d'équation $x = 4y$

Correction : f est une projection car sa matrice est de trace 1 et de déterminant 0. La décomposition colonne-ligne :

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -20 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$$

permet alors d'identifier les axes.

Pour les **Questions 4, 5 et 6** ci-dessous on donne les points A, B du plan ainsi que la droite d ci-dessous :



Question 4 (1 point)

Par une homothétie $h_{A,\alpha}$ centrée en A, le point B est envoyé sur d. Parmi les affirmations suivantes portant sur le rapport $\alpha \in \mathbb{R}$, laquelle est vraie ?

☐ $-1 \leqslant \alpha < 0$ ☐ $\alpha \geqslant 1$ ☐ $\alpha < -1$ ■ $0 \leqslant \alpha < 1$

Correction : $h_{A,\alpha}(B)$ est le point d'intersection des droites (AB) et d. Il est situé entre A et B.

Question 5 (2 points)

Par une rotation $r_{\Omega,\theta}$ centrée sur d, le point A est envoyé sur B. Parmi les affirmations suivantes portant sur l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$, laquelle est vraie ?

☐ $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ ☐ $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ ☐ $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant 0$ ■ $-\pi < \theta \leqslant -\frac{\pi}{2}$

Correction : Ω est le point d'intersection de d et de la médiatrice de AB. On le construit alors sur la feuille, et on observe l'angle orienté de $\overrightarrow{\Omega A}$ vers $\overrightarrow{\Omega B}$.

Question 6 (2 points)

La transformation composée $h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,2}$ est ...

■ la translation $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

☐ l'homothétie $h_{A,2}$ de centre A et de rapport 2

☐ l'homothétie $h_{A,\frac{1}{2}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

☐ la translation $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}$ de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Correction : C'est une translation car $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Par ailleurs, cette translation envoie A sur le milieu du segment AB.

Pour les **Questions 7, 8 et 9** ci-dessous on munit le plan d'un repère orthonormé et on donne la droite d et les plans π et ρ suivants :

$$d : y - 2 = 3 - x,\ z = 1, \quad \pi : x - 3y + 5z = 2, \quad \rho : 2y - z = 1\,.$$

Question 7 (1 point)

Par laquelle de ces expressions l'angle $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ entre π et ρ est-il caractérisé ?

- ☐ $\sin\varphi = \frac{10\sqrt{7}}{35}$
- ☐ $\cos\varphi = \frac{10\sqrt{7}}{35}$
- ■ $\cos\varphi = \frac{11\sqrt{7}}{35}$
- ☐ $\sin\varphi = \frac{11\sqrt{7}}{35}$

Correction : $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\rho|}{\|\vec{n}_\pi\|\|\vec{n}_\rho\|} = \frac{|1\cdot 0 - 3\cdot 2 + 5(-1)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{11}{5\sqrt{7}} = \frac{11\sqrt{7}}{35}$

Question 8 (1 point)

Quelle est la position de la droite d par rapport aux axes ou aux plans de cooordonnées ?

- ■ parallèle au plan (Oxy)
- ☐ parallèle à (Oy)
- ☐ parallèle à (Oz)
- ☐ incluse dans le plan (Oxy)

Correction : d *est dirigée par le vecteur de coordonnées* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, qui est directeur du plan* (Oxy)*, mais pas des plans* (Oxz) *et* Oyz*.*

Question 9 (2 points)

Par laquelle de ces expressions l'angle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ entre d et ρ est-il caractérisé ?

- ☐ $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$
- ■ $\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$
- ☐ $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$
- ☐ $\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Correction : $\sin\theta = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{v}_d|}{\|\vec{n}_\rho\|\|\vec{v}_d\|} = \frac{|0(-1)+2\cdot 1+(-1)0|}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$, on donne :

$$A(1,3), \quad B(-1,2), \quad \ell_1 : \; x-y=1, \quad \ell_2 : \; 2x-y=-3.$$

Les deux questions (a) et (b) de ce problème **peuvent être résolues indépendamment**.

(a) Une homothétie h de rapport 2 envoie A sur B.

- (i) Trouvez le centre Ω de l'homothétie h et donner son expression analytique.
- (ii) Quelle est l'image de la droite $\ell : x-4y=-11$ par h ?

(b) Soit p la projection sur un axe d parallèlement à un axe g, où d et g passent par l'origine de $\mathcal{R}$, et soit s la symétrie par rapport à d parallèlement à g. Sachant que $p(A)=p(B)$ et $s(\ell_1)=\ell_2$, déterminer :

- (i) des équations cartésiennes des axes d et g. *Indication : que peut-on dire de $\ell_1 \cap \ell_2$?*
- (ii) l'expression analytique de p.

Solution

(a) (i) On a :

$$\overrightarrow{\Omega B} = 2\overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{BA},$$

c'est-à-dire que Ω est le translaté de A par le vecteur $\overrightarrow{BA}$, ou en d'autres termes que A est le milieu de ΩB. On trouve donc les coordonnées de $\Omega(3,4)$. L'expression analytique de h est de la forme :

$$h : \begin{cases} x' &= 2x+\lambda \\ y' &= 2y+\mu \end{cases}.$$

En utilisant le fait que Ω est (l'unique) point fixe de h, on obtient:

$$\begin{cases} 3 &= 2\cdot 3+\lambda \\ 4 &= 2\cdot 4+\mu \end{cases},$$

et donc $\lambda=-3, \mu=-4$, et finalement l'expression analytique de h :

$$h : \begin{cases} x' &= 2x-3 \\ y' &= 2y-4 \end{cases}.$$

(ii) La droite ℓ passe par A, donc son image par h passe par $h(A)=B$ et est parallèle à ℓ. C'est donc la droite d'équation :

$$h(\ell) : x-4y=-1-4\cdot 2=-9.$$

(b) (i) Puisque A et B sont envoyés par p à la même image, la droite (AB) est parallèle à l'axe g. g est donc dirigée par $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{-1}$. Comme elle passe par l'origine, on a son équation:

$$g : x - 2y = 0.$$

Par ailleurs, on note que ℓ_1 et ℓ_2 sont sécantes (leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires). Puisque ℓ_1 est envoyée à ℓ_2 par une symétrie d'axe d, le point d'intersection de ℓ_1 et ℓ_2 est sur l'axe d (vu différemment, si ℓ_1 était parallèle à d, ℓ_1 et $s(\ell_1)$ seraient parallèles aussi; donc ℓ_1 et d sont sécantes, et $I = d \cap \ell_1$ est invariant par s et doit appartenir aussi à $s(\ell_1)$). Pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection, on résout le système :

$$\begin{cases} x - y & = 1 \\ 2x - y & = -3 \end{cases}$$

et on obtient le point d'intersection $I(-4, -5)$. Comme d passe par I et par l'origine, elle est d'équation :

$$d : 5x - 4y = 0.$$

(ii) Un vecteur directeur de d est $\binom{4}{5}$, et l'équation de g est $x - 2y = 0$; à partir de ces coefficients on peut former la matrice de projection P:

$$P = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; -2).$$

La transformation p a donc l'expression analytique suivante:

$$p : \begin{cases} x' & = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \\ y' & = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}y \end{cases}.$$

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Dans l'espace muni d'un repère, on donne :

$$\pi : x - y + z = 2, \quad \rho : x - 2y = 1, \quad \sigma : \begin{cases} x = 3 + 3s + t \\ y = -5 + 3s + 2t \\ z = -2 - s \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $\pi \cap \rho = d$ est une droite et en donner des équations paramétriques et cartésiennes.

(b) Déterminer une équation cartésienne de σ.

(c) Quelle est l'intersection de d et σ ?

(d) Quelle est la position relative de ρ et σ ?

Solution

(a) L'intersection $\pi \cap \rho$ est décrit par le système d'équations :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2y) - y + z = 2 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ z = 1 - y \end{cases}$$

En voyant y comme un paramètre, on obtient alors les équations paramétriques suivantes:

$$\pi \cap \rho : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection $\pi \cap \rho$ est donc bien une droite, qui passe par le point de coordonnées $(1, 0, 1)$ et est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Elle admet aussi pour équations cartésiennes :

$$d : \frac{x - 1}{2} = y = 1 - z\,.$$

(b) Le plan σ étant dirigé par les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on sait qu'il admet une équation cartésienne du type :

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 3 & 2 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - y + 3z = \text{cte}\,.$$

On trouve cette constante en exprimant que le point de coordonnées $(3, -5, -2)$ se trouve sur σ. On obtient :

$$\sigma : 2x - y + 3z = 6 + 5 - 6 = 5$$

(c) L'intersection de d et σ correspond à la valeur (ou aux valeurs) du paramètre t pour laquelle (ou lesquelles) on a :

$$2(1 + 2t) - t + 3(1 - t) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 4t - t + 3 - 3t = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.$$

Par conséquent, toutes les valeurs de t possibles conviennent, on a :

$$d \cap \sigma = d.$$

(d) Les équations des deux plans ρ et σ ne sont pas proportionnelles, ni de parties homogènes proportionnelles. Les deux plans sont donc sécants.